

LES PLANS FACTORIELS FRACTIONNAIRES

Claude HOINARD

**Faculté des Sciences Pharmaceutiques
« Philippe Maupas » -Tours**

LES PLANS EXPERIMENTAUX

L'expérimentation coûte cher, il faut avoir pour objectif d'obtenir les informations les plus fiables et les plus efficaces possibles en un minimum d'essais :

L'EXPÉRIMENTATION DOIT ÊTRE
OPTIMISÉE



***NÈcessitÈ d'une recherche
expÈrimentale bien planifiÈe***

Un plan d'expériences efficace se propose donc de faire varier plusieurs facteurs à la fois selon des règles d'organisation précises et rigoureuses : les plans que nous allons étudier sont multi factoriels et sont appelés habituellement *plans factoriels*.

Méthodologie dans l'étude d'un phénomène

Lors de l'étude d'un phénomène, plusieurs questions se posent, auxquelles répondent différents types de plans. On peut distinguer 3 grandes étapes dans l'acquisition des connaissances :

① **Recherche des facteurs influents**

② **Modélisation** : quand les facteurs influents ont été identifiés et leur importance quantifiée, on recherche ensuite l'équation permettant de décrire les variations de la réponse étudiée en fonction de celles des facteurs influents

③ **Optimisation** : déterminer quelles conditions expérimentales (les valeurs prises par les facteurs influents) permettent d'obtenir le meilleur résultat pour la réponse

⇒ la recherche des facteurs influents

Parmi tous les facteurs susceptibles d'influer sur le phénomène (c'est à dire sur la ou les réponses mesurées du phénomène),

- lesquels ont une influence significative ?
- que vaut quantitativement cette influence ?
- existe-t'il des interactions entre facteurs ?

Les plans qui permettent de rechercher les facteurs influents sont les **plans factoriels complets ou fractionnaires**.

les plans factoriels complets 2^n

Dans les plans factoriels complets 2^n , **n facteurs sont étudiés**. Chaque facteur est expérimenté sous **2 niveaux** (souvent appelés niveau bas et niveau haut). Pour des raisons de calcul, ces niveaux sont codés par leurs valeurs centrées réduites -1 et $+1$.

Toutes les combinaisons des niveaux de ces facteurs sont étudiées, au total 2^n , définissant un **nombre de 2^n essais quand chaque condition expérimentale est effectuée 1 fois** et $r \times 2^n$ essais si on répète r fois chaque expérience.

Généralités sur les effets

Les plans factoriels permettent de mettre en évidence parmi les facteurs étudiés, ceux qui ont une influence sur la réponse, ainsi que d'éventuelles interactions entre les facteurs.

La grandeur de cette influence est appelée **effet du facteur ou de l'interaction**. Un effet positif signifie que la valeur de la réponse augmente quand le facteur passe du niveau bas au niveau haut ; un effet négatif signifie que la réponse diminue quand on passe du niveau bas au niveau haut.

Un facteur A est d'autant plus influent que la valeur absolue de son effet est plus grande ; il est plus influent qu'un facteur B si la valeur absolue de son effet est plus grande.

Exemple : le plan 2^3

Dans une solution pharmaceutique habituellement fabriquée à 30°C , sous agitation ($200 \text{ tours}\cdot\text{min}^{-1}$) un léger trouble apparaît.

L'expérimentateur désire connaître la (ou les) cause(s) et pense que 3 facteurs peuvent jouer :

- la température
- la vitesse d'agitation
- la concentration d'un additif présent à 0,30 %

Le trouble se mesure par un indice d'opacité traduisant l'impression visuelle que donne l'intensité du « louche » : c'est la réponse.

- Il est décidé d'organiser une **expérience factorielle 2^3**

facteurs

A = Θ^{re}

B = vitesse agitation

C = concentration additif

niveaux

20°C - 40°C

100 t.min⁻¹ - 300 t.min⁻¹

0,1 % - 0,5 %

- Il y a donc 8 conditions expérimentales :

$$1 = A_0B_0C_0$$

$$2 = A_1B_0C_0$$

$$3 = A_0B_1C_0$$

$$4 = A_1B_1C_0$$

$$5 = A_0B_0C_1$$

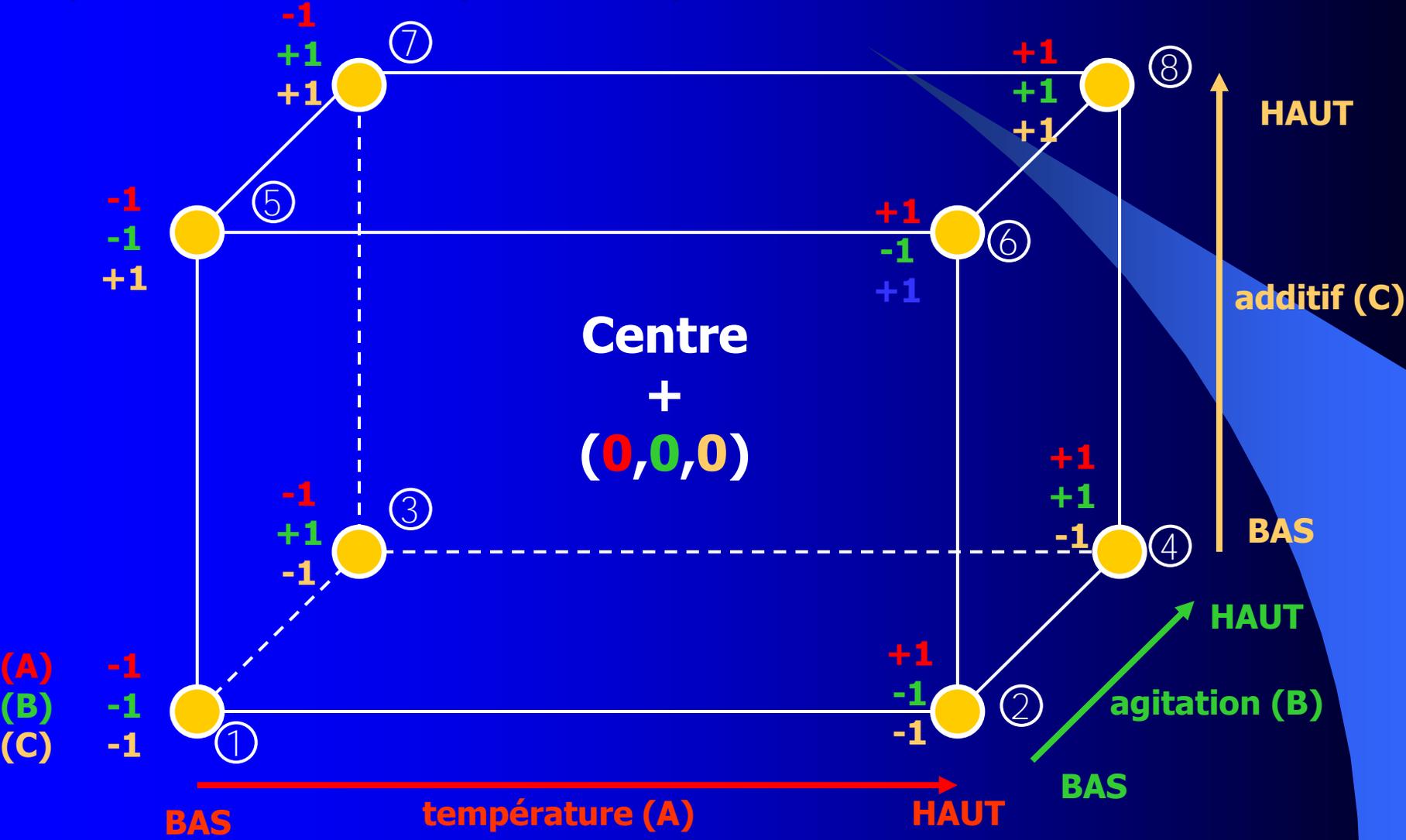
$$6 = A_1B_0C_1$$

$$7 = A_0B_1C_1$$

$$8 = A_1B_1C_1$$

Rappels plans complets

Plan 2^3 : Le domaine expérimental peut être représenté par un cube ; les points expérimentés sont aux 8 sommets.



Plan 2³ : La matrice d'expériences

niveau -1	20°C	100 t.min ⁻¹	0,1 %	
niveau +1	40°C	300 t.min ⁻¹	0,5 %	
n° essai	A (Θ ^{re})	B (agit.)	C (add.)	réponse
1	-1	-1	-1	0
2	+1	-1	-1	4,7
3	-1	+1	-1	0
4	+1	+1	-1	11,5
5	-1	-1	+1	9
6	+1	-1	+1	14,5
7	-1	+1	+1	5,1
8	+1	+1	+1	18,7

IMPORTANT : noter l'organisation des signes :

- pour **A** : succession **1-** puis **1+**
- pour **B** : succession **2-** puis **2+**
- pour **C** : succession **4-** puis **4+**

Effets des facteurs et des interactions

Avec les 8 conditions expérimentales du plan 2^3 , il est possible mathématiquement de calculer 8 paramètres : la **moyenne y_c** des 8 réponses et **7 effets indépendants les uns des autres** :

- è Les effets principaux des 3 facteurs étudiés A, B et C ; ils sont notés E_A , E_B et E_C
- è Les effets de 3 interactions mettant en jeu 2 facteurs (A.B, A.C et B.C). On notera E_{AB} , E_{AC} et E_{BC} leurs effets. La signification d'une interaction est la même que pour un plan 2^2 .
- è Il existe une possibilité d'interaction entre les 3 facteurs pris ensemble (A.B.C). Son effet est noté E_{ABC}

Les valeurs des effets

Les effets d'un plan 2^3 sont obtenus par un calcul faisant intervenir ici les 8 réponses. Ci-dessous, les valeur des effets, données par le logiciel *Minitab*.

$$\square E_A = + 4,41$$

$$\square E_{AB} = + 1,86$$

$$\square E_B = + 0,89$$

$$\square E_{AC} = + 0,36$$

$$\square E_C = + 3,89$$

$$\square E_{BC} = - 0,81$$

$$y_c = +7,94$$

$$\square E_{ABC} = +0,16$$

(moyenne des 8 réponses)

Attention confusion effet moyen (*coeff* dans Minitab) ou total

interactions : *EN PRATIQUE*

- ❑ On trouve assez souvent dans les applications des interactions entre 2 facteurs à effet important - il est tout à fait concevable que 2 facteurs n'agissent pas indépendamment sur la réponse - surtout lorsque les effets principaux de ces 2 facteurs sont grands.
- ❑ *En revanche*, l'existence d'une interaction mettant en jeu 3 facteurs simultanément suppose un système très complexe et ne se rencontre que très rarement. Dans la suite, nous supposerons toujours qu'il n'existe pas d'interactions d'ordres supérieurs (mettant en jeu plus de 2 facteurs).

Limitation à l'utilisation des plans factoriels complets

Les plans 2^n sont simples à concevoir et riches en informations : ils permettent de décrire quantitativement tous les effets des facteurs et de toutes les interactions.

Ainsi, dans une étude comportant **5 facteurs** (A, B, C, D et E), on peut estimer **31 effets** indépendamment les uns des autres : **5 effets principaux**, **10 interactions entre 2 facteurs** (AB, AC, ..., DE), **10 interactions entre 3 facteurs** (ABC, ABD, ..., CDE), **5 interactions entre 4 facteurs** (ABCD, ..., BCDE) et **1 interaction constituée des 5 facteurs** (ABCDE) ; mais il faut effectuer **32 essais** (2^5) ...

Dès que le nombre de facteurs augmente, leur mise en œuvre devient lourde et coûteuse, car le nombre des essais devient vite très important.

-> Plans fractionnaires !

De l'intérêt des plans fractionnaires

Ce sont des plans qui permettent d'effectuer, *le plus souvent*, **moins d'essais** que les plans factoriels complets.

Reprenons l'exemple d'une étude comportant 5 facteurs. Nous ne serons intéressés en pratique que par 16 informations : les 5 effets principaux, les 10 interactions AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE et la moyenne des réponses y_c .

Pourquoi ferait-on les 32 essais du plan complet ?

Un plan 2^{5-1} (2^4), ne comportant que 16 essais, suffit pour obtenir tous les renseignements ci dessus ...

De l'intérêt des plans fractionnaires (suite)

Dans un plan factoriel complet 2^n , le nombre d'essais est multiplié par 2 chaque fois que le nombre n de facteurs étudiés augmente d'une unité : la charge expérimentale devient vite prohibitive en nombre d'essais .

⇒ *Les plans factoriels fractionnaires, qui comme leur nom l'indique correspondent à des fractions du plan complet, permettent de réduire cette charge expérimentale en ne focalisant l'attention que sur les effets les plus importants (effets principaux et éventuellement interactions de 2ème ordre).*

Remarques sur les plans fractionnaires.

- - Un plan fractionnaire réalise des **économies d'essais**. Mais il y a évidemment des **contreparties : des ambiguïtés** risquent de survenir lors de l'interprétation des résultats, ceci d'autant plus fréquemment que le fractionnement du plan complet est plus grand. On sera parfois amené à effectuer des **expériences complémentaires pour lever ces ambiguïtés**.
- - *Ces plans fractionnaires sont ceux qui sont utilisés lors de la phase de recherche de tous les facteurs agissant sur un procédé (« screening des facteurs du procédé »), phase dans laquelle on est amené à étudier simultanément de nombreux facteurs, parfois proches de la dizaine ...*

Les plans factoriels fractionnaires

$$2^{n-k}$$

Notations :

- **2** : nombre de niveaux par facteur
- **n** : nombre de facteurs étudiés
- **k** : par rapport au plan complet, le nombre d'essais à réaliser est divisé par 2^k . On choisira donc k en fonction de la charge expérimentale que l'on veut supporter, en sachant que plus k est grand plus le volume d'expériences est faible, mais plus l'interprétation risque d'être délicate.

Nombre d'essais d'un plan fractionnaire 2^{n-k}

On peut choisir de n'effectuer :

- Que la **moitié** des essais du plan complet : le plan est noté 2^{n-1}
- Que le **quart** des essais du plan complet : le plan est noté 2^{n-2}
- Que le **huitième** des essais du plan complet : le plan est noté 2^{n-3}

...etc.

Remarque : *il n'est pas permis de choisir n'importe quels essais du plan complet. Le fractionnement doit obéir à des règles d'organisation précises.*

I - Les plans 2^{n-1}

I-1 : fractionnement d'un plan 2^4 en 2 parties

Dans la matrice des effets du plan 2^4 , le tri des 16 essais (les 16 lignes) d'après la colonne d'interaction **ABCD** permet de séparer 2 groupes de 8 essais chacun :

- Celui pour lequel **ABCD = +1** est le **demi-plan supérieur** ; il comprend les essais 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13 et 16.
- Celui pour lequel **ABCD = -1** est le **demi-plan inférieur** ; il comprend les essais 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14 et 15.

- Le plan complet 2^4 comporte 16 essais : il permet la détermination de 16 paramètres indépendants (la moyenne des essais estimant la réponse au centre du domaine et 15 effets vrais).
- Avec seulement 8 essais, on ne peut calculer que 8 paramètres indépendants que l'on appellera des « effets apparents » ou mieux des **contrastes**.

les 8 contrastes E' du demi-plan supérieur comparés aux effets vrais E du plan complet :

$\frac{1}{2}$ plan supérieur	Effets du plan complet 2^4	
$E'_A = E'_{BCD} = 0,3125$	$E_A = 0,30625$	$E_{BCD} = 0,00625$
$E'_B = E'_{ACD} = 0,2625$	$E_B = 0,24375$	$E_{ACD} = 0,01875$
$E'_C = E'_{ABD} = 0,4375$	$E_C = 0,61875$	$E_{ABD} = -0,18125$
$E'_D = E'_{ABC} = 0,0875$	$E_D = 0,00625$	$E_{ABC} = 0,08125$
$E'_{AB} = E'_{CD} = 0,2125$	$E_{AB} = 0,09375$	$E_{CD} = 0,11875$
$E'_{AC} = E'_{BD} = -0,0625$	$E_{AC} = -0,18125$	$E_{BD} = 0,11875$
$E'_{AD} = E'_{BC} = 0,0875$	$E_{AD} = 0,05625$	$E_{BC} = 0,03125$
$E'_{ABCD} = E'_M = 61,4625$	$E_{ABCD} = 0,05625$	$E_M = 61,40625$

les 8 contrastes E'' du demi-plan inférieur comparés aux effets vrais E du plan complet :

$\frac{1}{2}$ plan inférieur	Effets du plan complet 2^4	
$E''_A = -E''_{BCD} = 0,3000$	$E_A = 0,30625$	$E_{BCD} = 0,00625$
$E''_B = -E''_{ACD} = 0,2250$	$E_B = 0,24375$	$E_{ACD} = 0,01875$
$E''_C = -E''_{ABD} = 0,8000$	$E_C = 0,61875$	$E_{ABD} = -0,18125$
$E''_D = -E''_{ABC} = -0,0750$	$E_D = 0,00625$	$E_{ABC} = 0,08125$
$E''_{AB} = -E''_{CD} = -0,0250$	$E_{AB} = 0,09375$	$E_{CD} = 0,11875$
$E''_{AC} = -E''_{BD} = -0,3000$	$E_{AC} = -0,18125$	$E_{BD} = 0,11875$
$E''_{AD} = -E''_{BC} = 0,0250$	$E_{AD} = 0,05625$	$E_{BC} = 0,03125$
$E''_{ABCD} = -E''_M = -61,3500$	$E_{ABCD} = 0,05625$	$E_M = 61,40625$

Les aliases

□ - Les tableaux précédents montrent que les « effets apparents » sont égaux 2 à 2 en valeur absolue :

$$E'_A = E'_{BCD} \quad , \quad E'_B = E'_{ACD} \quad , \quad E'_{AB} = E'_{CD} \quad \dots, \textit{etc.}$$
$$E''_A = -E''_{BCD} \quad , \quad E''_B = -E''_{ACD} \quad , \quad E''_{AB} = -E''_{CD} \quad \dots, \textit{etc.}$$

Les actions sont dites aliasées 2 par 2 : BCD est l'alias de A (et réciproquement), ACD l'alias de B, CD l'alias de AB, ... , etc.

On écrit symboliquement :

$$(1/2 \text{ plan sup.}) \quad \mathbf{A = BCD} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A = -BCD} \quad (1/2 \text{ plan inf.})$$
$$\mathbf{B = ACD} \quad \text{ou} \quad \mathbf{B = -ACD}$$

.....

$$\mathbf{AB = CD} \quad \text{ou} \quad \mathbf{AB = -CD}$$

etc.

Relation entre contrastes et effets vrais du plan complet.

- Pour le demi-plan supérieur, la valeur d'un contraste est la **somme** des 2 effets vrais du plan complet de ses 2 aliases :

$$\begin{aligned} E'_A &= E'_{BCD} = E_A + E_{BCD} \\ 0,3125 &= 0,30625 + 0,00625 \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} E'_B &= E'_{ACD} = E_B + E_{ACD} \\ E'_{AB} &= E'_{CD} = E_{AB} + E_{CD} \end{aligned}$$

etc.

- Pour le demi-plan inférieur, la valeur d'un contraste est la **différence** des 2 effets vrais du plan complet de ses 2 aliases :

$$E''_A = -E''_{BCD} = E_A - E_{BCD}$$

$$0,3000 = 0,30625 - 0,00625$$

...

$$E''_B = -E''_{ACD} = E_B - E_{ACD}$$

$$E''_{AB} = -E''_{CD} = E_{AB} - E_{CD}$$

etc.

Voilà donc le prix à payer : le nombre d'expériences a été divisé par 2, mais les effets que l'on calcule ne sont plus « purs », ils sont mélangés (aliasés) avec les interactions

Principe d'exploitation des résultats

On admettra toujours que les interactions d'ordre supérieur à 2 ont des effets nuls ou négligeables.

- Les contrastes E' ou E'' des facteurs principaux peuvent donc être considérés comme étant du même ordre de grandeur que leurs effets E du plan complet si ces facteurs sont aliasés avec des interactions d'ordre 3 ou plus.
- Il en est de même pour les interactions d'ordre 2 aliasées avec des interactions d'ordres supérieurs.

- **En revanche, une valeur élevée (significative) d'un contraste faisant intervenir des aliases constitués de 2 interactions d'ordre 2 posera problème puisqu'on ne saura pas à quelle interaction attribuer l'effet ou si ce sont les 2 interactions qui sont significatives.**

Il sera nécessaire dans ce cas d'effectuer des expériences complémentaires pour identifier l'interaction (ou les interactions) significative(s)

1- 2 : prévision des aliases

Il est possible de prévoir les couples d'aliases au moyen d'une mathématique simple.

- *Dans le $1/2$ plan supérieur, on écrit :*

$$\mathbf{I} = \mathbf{ABCD}$$

Cette relation traduit le fait que les 2 colonnes M et ABCD ne contiennent que des +1. Elle est appelée la **relation de définition**.

- Pour n'importe quelle colonne de la matrice des effets, celles ci ne contenant que des séquences de +1 et -1 , on peut écrire les relations suivantes

$$I \times I = I^2 = +1 = I$$

$$A \times A = A^2 = +1 = I$$

$$B \times B = B^2 = +1 = I$$

.....

$$I \times A = A \times I = A$$

(Une colonne de signes + et - multipliée par elle-même donne une colonne de signes +)

- En multipliant les 2 membres de l'égalité de la relation de définition par les termes successifs de la matrice des effets puis en simplifiant en utilisant les règles précédentes, on obtient tous les aliases.

Exemples :

$$I = ABCD$$

$$I_x A = A^2BCD$$

$$**A = BCD**$$

$$I_x AB = A^2B^2CD$$

$$**AB = CD**$$

- *Dans le 1/2 plan inférieur*, la relation de définition est :

$$\mathbf{I} = -\mathbf{ABCD}$$

Les couples d'aliases qui s'en déduisent sont donc

$$A = -BCD$$

$$AB = -CD$$

et traduisent le fait que les séquences de +1 et -1 des colonnes de la matrice des effets sont cette fois opposées.

L'interaction **ABCD** qui détermine l'ensemble des aliases est appelée
GENERATEUR D'ALIASES

I-3 : mise en œuvre des plans 2^{n-1}

1 - Détermination des couples d'aliases par le choix de la relation de définition. (*) *Pour un plan 2^{n-1} , il y a toujours intérêt à choisir l'interaction d'ordre le plus élevé de la matrice des effets.*

2 - Construction de la matrice des contrastes.

On utilise la matrice des effets du plan complet contenant un facteur de moins que le plan étudié. Il est utile de modifier les en-têtes des colonnes en faisant figurer les facteurs et les interactions de 2ème ordre.

(*) Dans le cas précédent on aurait pu utiliser une autre colonne (un autre générateur d'aliases) pour fractionner le plan complet, ABC par exemple. Dans ce cas la relation de définition $I=ABC$ permet de prévoir que A est aliasé avec BC, B avec AC etc... C'est un moins bon plan que le précédent, les contrastes des facteurs A, B et C seront plus difficiles à interpréter.

Par exemple, pour un plan 2^{4-1} , pour lequel la relation de définition est **I=ABCD**, les aliases sont,

$$A = BCD$$

$$B = ACD$$

$$C = ABD$$

$$AB = CD$$

$$AC = BD$$

$$BC = AD$$

$$ABC = D$$

$$I = ABCD$$

on utilisera la matrice des effets du plan 2^3 dont les 8 en-têtes figurent à gauche ci dessus.

Noter que la colonne ABC est aussi celle du facteur D : on remplacera donc ABC par D dans l'en-tête.

3 - Analyse des contrastes

Quand l'expérimentation est terminée et les valeurs y des réponses connues, les contrastes sont calculés de la même façon que pour un plan factoriel complet.

Les techniques statistiques qui permettent de décider si un contraste peut être considéré comme significatif ou non sont les mêmes que pour les plans complets.

4 - Interprétation des résultats

Dans ce type de plan fractionnaire, il peut arriver qu'un couple d'aliases mettant en jeu 2 interactions de 2ème ordre soit significatif ; il faut alors effectuer les expériences de l'autre 1/2 plan complémentaire pour lever l'ambiguïté.

I-4 : Exemple d 'application - plan 2^{5-1} (Exercice n° 1)

- Il s 'agit de la mise au point de 5 réglages d'un spectrofluorimètre (les 5 facteurs étudiés) pour assurer les valeurs les plus appropriées des 3 paramètres sensibilité , bruit de fond , sélectivité pour des enregistrements de spectres (il y a donc 3 réponses y pour chaque spectre).
- Un plan complet nécessiterait 32 spectres ; il n'en sera effectué que 16 avec le 1/2 plan supérieur puisqu'on choisit comme relation de définition **I = ABCDE**.

I = ABCDE

aliases des facteurs :

$$A = BCDE$$

$$B = ACDE$$

$$C = ABDE$$

$$D = ABCE$$

$$E = ABCD$$

les 5 effets principaux sont tous aliasés avec des interactions d'ordre 4.

aliases des interactions d'ordre 2 :

$$AB = CDE$$

$$AC = BDE$$

.....

$$CE = ABD$$

$$DE = ABC$$

les 10 interactions d'ordre 2 sont toutes aliasées avec des interactions d'ordre 3.

⇒ Il n'y aura donc pas d'ambiguïtés d'interprétation des contrastes.

Tableau des valeurs des contrastes

<i>action</i>	<i>sensibilité</i>	<i>Bruit de fond</i>	<i>sélectivité</i>
A	+0,0887	-0,6750	-0,106
B	+0,8200	-0,0125	-3,781
C	-0,0025	-0,0250	-0,031
D	-0,0600	-0,0375	-1,794
E	+1,3000	+1,1500	+0,056
A B	+0,0200	-0,1125	+0,144
A C	+0,0225	-0,0250	-0,106
A D	+0,1850	-0,0125	+0,081
A E	+0,0950	-0,0750	+0,081
B C	+0,1087	-0,0625	+0,069
B D	-0,0388	-0,0500	+0,281
B E	+0,0488	-0,0375	-0,119
C D	+0,0513	-0,0375	+0,056
C E	-0,1612	+0,1000	-0,194
D E	-0,1638	-0,0375	-0,006

Tableau récapitulatif des résultats

<i>facteur</i>	<i>sensibilité</i>	<i>Bruit de fond</i>	<i>sélectivité</i>
Largeur de fente du monochromateur d'excitation	0	-	0
Largeur de fente du monochromateur de fluorescence	+	0	-
Température de l'échantillon	0	0	0
Vitesse de balayage du spectre	0	0	-
Tension du photomultiplicateur	+	+	0

Synthèse et conclusions

- La température de l'échantillon n'a pas d'importance.
- Pour détecter la substance M à l'état de traces, il faut une forte sensibilité et le bruit de fond le plus faible possible. On ouvrira donc les fentes des monochromateurs d'excitation et de fluorescence ; Pour la tension du P.M. il faudra trouver un compromis acceptable entre bruit de fond et sensibilité.
- Dans le cas de l'analyse de M en présence de substances voisines, il est recherché une bonne sélectivité et une sensibilité acceptable. On choisira donc une vitesse de balayage faible ; pour la largeur de la fente du monochromateur de fluorescence, il faudra trouver un compromis.

II - Les plans 2^{n-2}

- *Ils consistent à réaliser l'expérimentation avec 4 fois moins d'essais que dans le plan factoriel complet correspondant.*

Avec $n = 5$ facteurs il sera effectué 8 essais , avec $n = 6$ facteurs on en fera 16 , ...*etc.*

- Compte tenu du faible nombre d'essais par rapport au nombre de facteurs étudiés, on peut s'attendre à avoir assez souvent des ambiguïtés lors de l'interprétation ; des expériences complémentaires seront alors nécessaires et conduiront ainsi à une expérimentation fractionnée et progressive du point de vue chronologique.

Ce concept d 'expérimentation progressive vers la connaissance d 'un procédé est intéressant à considérer en pratique ; il est très préférable à une « grosse » expérimentation effectuée en une fois pour de multiples raisons : plus de facilité dans l'organisation, possibilité de réorienter l 'étude en fonction des résultats partiels , moindre coût en cas d 'échec ...

II-1 : fractionnement d'un plan en 4.

- Reprenons la matrice des effets du plan complet 2^4 et utilisons maintenant 2 colonnes d'interactions pour réaliser le tri des 16 essais (les 16 lignes).
Choisissons par exemple les colonnes **ABC** et **BCD**.
- On obtient 4 fractions, chacune de 4 essais dont les caractéristiques sont :

désignation	N° des essais	caractéristiques
fraction 1	3 , 5 , 10 , 16	ABC = +1 BCD = +1
fraction 2	4 , 6 , 9 , 15	ABC = -1 BCD = +1
fraction 3	2 , 8 , 11 , 13	ABC = +1 BCD = -1
fraction 4	1 , 7 , 12 , 14	ABC = -1 BCD = -1

En n'utilisant que les 4 essais d'une des fractions, on ne peut calculer que 4 contrastes ; or le plan complet comporte 16 effets (en incluant la moyenne des essais) ...

⇒ *chaque contraste est formé de 4 aliases que l'on peut prévoir.*

Par exemple pour la fraction 1,

$$I = ABC \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = BC}$$

$$I = BCD \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = ABCD}$$

$$ABC = BCD \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = D}$$

d'où la succession des 4 aliases :

$$\mathbf{A = D = BC = ABCD}$$

Les aliases dans les 4 fractions du plan complet

désignation	aliases	
Fraction 1	A = D = BC = ABCD B = AC = CD = ABD	C = AB = BD = -ACD I = AD = ABC = BCD
Fraction 2	A = -D = -BC = ABCD B = -AC = CD = -ABD	C = -AB = BD = ACD I = -AD = -ABC = BCD
Fraction 3	A = -D = BC = -ABCD B = AC = -CD = -ABD	C = AB = -BD = -ACD I = -AD = ABC = -BCD
Fraction 4	A = D = -BC = -ABCD B = -AC = -CD = ABD	C = -AB = -BD = ACD I = AD = -ABC = -BCD

Les successions d'aliases du tableau précédent appellent 2 commentaires :

- les 4 facteurs principaux sont tous aliasés avec des interactions d'ordre 2, ce qui est inévitable pour un tel fractionnement ; mais on voit aussi que 2 facteurs (A et D) sont aliasés entre eux, ce qui est rédhibitoire dans un plan factoriel fractionnaire. *L'objectif premier d'un plan fractionnaire est d'estimer les effets des facteurs principaux indépendamment les uns des autres.*

- *Selon la fraction choisie, le signe des aliases est différent.*

D par exemple est de signe opposé à **A** dans les fractions 2 et 3, alors qu'il est de même signe dans les fractions 1 et 4 : cette remarque est à la base du choix des expériences complémentaires à effectuer lorsqu'il y a ambiguïté dans l'interprétation des contrastes.

II-2 : mise en œuvre des plans 2^{n-2}

Il faut successivement envisager :

- la détermination des facteurs à étudier, de leurs 2 niveaux, et de la (ou les) réponse(s) à mesurer.

- **La détermination des aliases.**

La matrice des contrastes correspond à celle d'un plan factoriel complet contenant 2 facteurs de moins que le nombre de facteurs à étudier. Dans la matrice des effets de ce plan complet, on attribue une interaction d'ordre 2 ou plus (si possible) à chacun des 2 facteurs absents de ce plan complet : on définit ainsi 2 générateurs d'aliases tels qu'on est sûr de ne pas aliaser des facteurs entre eux. Les générateurs d'aliases déterminent les 2 relations de définition.

- **La matrice d 'expériences** (les conditions de niveaux des facteurs dans les divers essais) est contenue dans la matrice des contrastes. L 'expérimentation est alors effectuée et les réponses y mesurées. Les contrastes sont ensuite calculés.

- **Analyse et interprétation des résultats**

Pour tester la signification statistique des contrastes, il est souvent utile de prévoir quelques essais correspondant à des répétitions pour connaître l'erreur type S_E de chaque effet.

Pour interpréter les contrastes, on admet les règles suivantes :

- *on néglige les interactions d 'ordre supérieur à 2.*
- *quand 2 facteurs ont des effets principaux nuls, leur interaction est considérée nulle.*
- *quand un contraste est nul ou négligeable, chacun de ses termes l'est aussi.*

II-3 : les essais complémentaires

Quand l'analyse statistique fait apparaître des contrastes significatifs, il est parfois difficile de les interpréter, même en ne tenant compte que des facteurs principaux et des interactions de 2ème ordre.

- Par exemple, dans la fraction 1 du plan 2^{4-2} précédent, supposons que le contraste **A (D, BC)** soit **seul** à être significatif.

On peut certes dire que ce n'est pas l'interaction **BC** qui agit puisque les contrastes de **B (AC, CD)** et **C (AB, BD)** n'ont pas d'effets (*2e règle précédente*). Mais on ne sait pas si c'est le facteur **A** ou le facteur **D** qui a une action ; il est aussi possible que les facteurs agissent tous les 2 ...

Il y a donc une ambiguïté dans l'interprétation qui nécessite une expérimentation complémentaire.

On sait cependant que la valeur du contraste E' est relié aux effets réels inconnus E_A et E_D du plan complet par :

$$E'_A = E'_D \approx E_A + E_D \quad (\text{BC négligé})$$

En expérimentant en plus la fraction 2 (ou la fraction 3), on obtiendra un contraste E'' dont la valeur s'écrit :

$$E''_A = -E''_D \approx E_A - E_D \quad (\text{BC négligé})$$

Ces 2 équations permettent de calculer les valeurs des 2 effets E_A et E_D ; on obtient :

$$E_A = \frac{E'_A + E''_A}{2} \quad E_D = \frac{E'_A - E''_A}{2}$$



- **En conclusion**, l'expérimentation d'une fraction complémentaire de la fraction initiale utilisée permet de dissocier les aliases et donc de lever l'ambiguïté apparue lors de l'interprétation du plan initial.

Le choix de la fraction complémentaire est guidé par les signes de la succession des aliases du plan initial.

II-4 : Exemple d 'application - plan 2^{5-2}

(Exercice n° 2)

- Cet exemple concerne l'étude de l'influence de 5 facteurs, chacun à 2 niveaux, sur la couleur d'une préparation pharmaceutique, cette dernière devant être la plus faible possible. La réponse y est un indice de couleur dont la valeur est d'autant plus élevée que la couleur est forte.
- Avec le plan factoriel complet, il faudrait effectuer 32 préparations... Il est décidé de n'en faire initialement que 8, soit le quart (plan 2^{5-2}).
La matrice des contrastes de ce plan est donc celle d'un plan 2^3 .

Construction des aliases

- Les responsables de l'expérimentation ont décidé que les 2 générateurs d'aliases seraient, dans le plan 2^3 :

$$\mathbf{D = ABC}$$

$$\mathbf{E = AC}$$

Les 2 relations de définition indépendantes s'en déduisent

$$\mathbf{I = ABCD} \quad (1)$$

$$\mathbf{I = ACE} \quad (2)$$

De l'égalité des 2 relations $ABCD = ACE$, on obtient :

$$\mathbf{E = BD} \quad (3)$$

Ces 3 relations (1) (2) (3) permettent de calculer facilement l'ensemble des successions d'aliases.

I = ABCD

(1)

I = ACE

(2)

E = BD

(3)

d'où les successions d'aliases du plan initial :

A = CE = BCD = ABDE

B = DE = ACD = ABCE

C = AE = ABD = BCDE

D = BE = ABC = ACDE

E = AC = BD = ABCDE

AB = CD = ADE = BCE

BC = AD = ABE = CDE

I = ACE = BDE = ABCD

En jaune figurent les actions à mentionner dans les en-têtes de la matrice des contrastes.

Analyse : examen statistique des contrastes

- **$E'(A, CE) = -2,175$**
- $E'(B, DE) = -0,550$
- **$E'(C, AE) = -3,325$**
- $E'(D, BE) = +0,100$
- **$E'(E, AC, BD) = -4,55$**
- $E'(AB, CD) = +0,625$
- $E'(AD, BC) = -0,675$
- $I = 26,05$

- Sachant qu'un **contraste** n'est considéré comme **significatif que si sa valeur (absolue) est supérieure à 2**, on voit que 3 contrastes, ceux contenant **A**, **C** et **E** (*en jaune*) sont concernés.

Note : la dispersion des mesures d'indice de couleur avait été réalisée antérieurement grâce à des répétitions. On avait obtenu $\sigma_y = 2,7$. L'erreur type d'un contraste est $\sigma_E = \sigma_y / \sqrt{n} \approx 0,95$. On considère souvent qu'un effet est significatif ($P = 0,05$) s'il dépasse $2\sigma_E$, soit ici 1,9 arrondi à 2.

Interprétation du plan initial

Après avoir réalisé ces 8 essais,

- On voit que les facteurs **B** (fournisseurs de l'excipient) et **D** (ordre d'addition des constituants du mélange) n'ont pas d'effet appréciable sur la couleur de la préparation. Leur interaction **BD** n'en a donc pas non plus.
- En revanche, les contrastes des 3 autres facteurs (**A**, **C** et **E**) sont significatifs ; mais comme ils sont tous aliasés avec leurs interactions de 2ème ordre, il est impossible de dire s'il y a 1, 2 ou même 3 facteurs actifs et s'il existe ou non une ou plusieurs interaction(s) significatives.

Il est indispensable d'effectuer une expérience complémentaire pour lever l'ambiguïté.

Les aliases et la génération de la matrice d'expériences d'un plan complémentaire.



- *L'organisateur a décidé pour expérimenter une 2ème fraction du plan complet de choisir comme générateurs d'aliases*

$$\mathbf{D} = \mathbf{ABC} \text{ (1) et } \mathbf{E} = -\mathbf{AC} \text{ (2).}$$

On voit immédiatement que la dissociation entre **E** et **AC** sera effectuée (cf 11-3 les essais complémentaires). Comme (2) indique aussi que **A = -CE** et **C = -AE**, les effets de ces 2 facteurs seront également dissociés de leur interaction : *c'est un bon plan complémentaire qui devrait permettre de solutionner les ambiguïtés du plan initial.*

- **Dans la matrice d'expériences** (issue du plan 2^3), **il faut inverser les signes + et - de la colonne AC** car **AC = -E** : le facteur **E** expérimenté est dans cette fraction opposé à **AC**. En revanche, **D** remplace **ABC** sans changement des signes puisqu'on a choisi **D = ABC**.

Valeurs des contrastes et calculs des effets réels

exemple de calcul :

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_A = E'_{CE} \approx E_A + E_{CE} \\ E''_A = -E''_{CE} \approx E_A - E_{CE} \end{array} \right. \quad E_A = \frac{E'_A + E''_A}{2} \quad E_{CE} = \frac{E'_A - E''_A}{2}$$

Plan initial	Plan complémentaire	Effets calculés	
$E'(A, CE) = -2,175$	$E''(A, -CE) = -0,500$	$E_A = -1,338$	$E_{CE} = -0,838$
$E'(B, DE) = -0,550$	$E''(B, -DE) = -1,00$	$E_B = -0,775$	$E_{DE} = 0,225$
$E'(C, AE) = -3,325$	$E''(C, -AE) = 3,175$	$E_C = -0,075$	$E_{AE} = -3,25$
$E'(D, BE) = 0,100$	$E''(D, -BE) = -1,825$	$E_D = -0,863$	$E_{BE} = 0,963$
$E'(E, AC) = -4,55$	$E''(E, -AC) = -3,125$	$E_E = -3,838$	$E_{AC} = -0,713$

- ❑ Les contrastes dissociés calculés à partir des valeurs E' et E'' des 2 fractions sont identiques aux valeurs qu'on pourrait calculer en considérant globalement la matrice des 16 essais effectués (il s'agit d'un **plan 2⁵⁻¹** avec comme relation de définition **I = ABCD**).
- ❑ Le **seuil de signification d'un effet** calculé est plus petit que la valeur 2 utilisée précédemment. Comme chaque effet calculé fait intervenir les 16 essais, on peut écrire :

$$\sigma_E = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} = \frac{2,7}{\sqrt{16}} = 0,675$$

Au risque 0,05 , un effet est significatif si sa valeur absolue est supérieure à $2\sigma_E = 1,35$.

3 effets peuvent être considérés comme significatifs : A (juste à la limite), E et leur interaction AE.

Synthèse et conclusion

- 2 des 5 facteurs étudiés agissent sur la couleur de la préparation : **la température du mélange (A)** et plus fortement **la nature d'un additif (E)**. Ces 2 facteurs présentent **une interaction très significative** : l'action de la température est différente selon qu'on utilise S_1 ou S_2 .
- Comme les effets estimés sont tous négatifs (la couleur diminue quand on passe du niveau bas au niveau haut d'un facteur) , ***il y a donc intérêt à utiliser une température élevée associée à l'additif S_2 pour avoir la couleur la plus faible.***

III - Les plans 2^{n-k} ($k > 2$)

- Ces plans concernent le cas où de nombreux facteurs sont étudiés dans l'expérimentation ($n = 6, 7$, voire plus ...) et pour lesquels on utilise une petite fraction du plan complet ($k = 3$: le huitième ; $k = 4$: le seizième ...), ceci afin de ne pas effectuer d'emblée trop d'essais.

III-1 : mise en oeuvre

*Les principes d'établissement de ces plans sont les mêmes que pour les plans 2^{n-1} et 2^{n-2} . Mais comme le nombre d'effets du plan complet est grand, **le nombre d'aliases par contraste est élevé** et ceci d'autant plus que k est grand. La détermination des aliases devient de plus en plus fastidieuse*

k	fraction du plan étudiée	nbre aliases/ contraste
1	1/2	2
2	1/4	4
3	1/8	8
4	1/16	16
..

Le concept de résolution

Pour construire un plan fractionnaire on considère :

- la matrice des **effets d'un plan de base**
et - les **facteurs supplémentaires** à étudier **associés** à certaines **interactions**, de préférence **d'ordre élevé** (on espère qu'elles sont faibles ou nulles)

Mais de plus :

Il faut s'assurer que les **facteurs principaux** sont **aliasés** avec les **interactions d'ordre le plus élevé possible**

-> **Notion de résolution !**

La résolution d'un plan fractionnaire

- **Un plan est de résolution 3** s'il ne confond pas les effets principaux les uns avec les autres mais qu'il **confond** des **effets principaux** avec des **interactions d'ordre 2**.

Un tel plan est saturé

exemple : $n=6$ facteurs

Plan $2^{6-3} \leftrightarrow 8$ essais $\leftrightarrow 8$ contrastes calculés

Si fractionnement bien choisi on peut avoir 6 contrastes avec un **facteur principal et un seul**

si on veut fractionner encore

Plan $2^{6-4} \leftrightarrow 4$ essais $\leftrightarrow 4$ contrastes calculés

On a nécessairement des **facteurs principaux confondus**

La résolution d'un plan fractionnaire

□ Un plan de résolution 4 ne confond pas les effets principaux avec d'autres effets principaux ni avec des interactions d'ordre 2, mais confond des interactions d'ordre 2 entre elles.

Il est meilleur qu'un plan 3

exemple : plan 2^{4-1} vu précédemment

□ Un plan de résolution 5 ne confond pas d'effets principaux et d'interactions de 2ème ordre les uns avec les autres la confusion se fait avec des interactions d'ordres supérieurs.

C'est le meilleur des cas

III-2 : Exemple d 'application - plan 2⁶⁻³

(exercice 3)

- Il s'agit de l'étude de la **robustesse d'une procédure d'analyse**, *qualité qui désigne la capacité de cette procédure à donner des résultats exacts même en présence de petits écarts des conditions par rapport au protocole expérimental* (le mode d'emploi), variations qui se produisent inévitablement lors de l'utilisation en routine, par négligence ou manque de soin ...
- L'exemple porte sur le dosage spectrophotométrique du tartrate d'ergotamine ; **5 facteurs du protocole sont testés** : *la reproductibilité de la pesée (B), la température de la réaction de coloration (C), le temps de développement de la coloration (D), la concentration du réactif en vanilline (E) et en acide sulfurique (F).*
Ces 5 facteurs de variation sont expérimentés pour 2 concentrations très différentes de tartrate d'ergotamine, d'où le 6ème facteur expérimental, *la concentration, notée (A).*

- Le facteur concentration devra évidemment avoir un effet sur la réponse (la mesure de l'absorbance). En revanche, *pour que la procédure soit déclarée robuste, aucun des 5 autres facteurs ne doit avoir d'effet, ni même d'interaction avec le facteur concentration.*
- Plutôt que d'effectuer les 64 dosages nécessités par un plan 2^6 , les expérimentateurs décident de n'en faire que 8 (plan 2^{6-3}) et c'est « a priori » une bonne idée car, en principe, il ne devrait pas se produire d'ambiguïté lors de l'interprétation puisque aucun facteur, sauf la concentration, et aucune interaction ne devrait être significative.

Détermination des aliases

- le plan 2^6 comporte 64 paramètres : la moyenne des réponses et 63 effets dont **6 effets principaux** et **15 effets d'interaction d'ordre 2**.
- Dans le plan 2^{6-3} , on ne peut calculer que 8 paramètres indépendants : ***chaque contraste est donc constitué de 8 aliases***.
- Les expérimentateurs ont décidé de choisir comme générateurs d'aliases dans la matrice des effets du plan 2^3 ,

$$\mathbf{D} = \mathbf{AB}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{AC}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{BC}$$

$$D = AB$$

$$E = AC$$

$$F = BC$$

- Les 3 relations de définition indépendantes sont donc :

$$I = ABD \quad (1)$$

$$I = ACE \quad (2)$$

$$I = BCF \quad (3)$$

Les 4 autres relations s'obtiennent en les combinant :

$$(1) \times (2) \quad I = BCDE \quad (4)$$

$$(1) \times (3) \quad I = ACDF \quad (5)$$

$$(2) \times (3) \quad I = ABEF \quad (6)$$

$$(1) \times (2) \times (3) \quad I = DEF \quad (7)$$

Ces 7 relations permettent de calculer pour chaque contraste les 8 constituants de chaque succession d'aliases.

$$I=ABD=ACE=BCF=BCDE=ACDF=ABEF=DEF$$

Aliases et valeurs des contrastes

- $A = BD = CE$
- $B = AD = CF$
- $C = AE = BF$
- $D = AB = EF$
- $E = AC = DF$
- $F = BC = DE$
- (colonne ABC)
 $AF = BE = CD$
- $E'(A \dots) = 0,3794$
- $E'(B \dots) = 0,0181$
- $E'(C \dots) = 0,0044$
- $E'(D \dots) = 0,0194$
- $E'(E \dots) = 0,0106$
- $E'(F \dots) = -0,0131$
- $E'(AF \dots) = -0,0169$

Interprétation et conclusion

- **La limite supérieure critique d'un effet, exprimée en absorbance, a été fixée à 0,025** par le responsable du dosage. *Elle correspond à une variation d'absorbance de 0,05 quand on passe du niveau bas au niveau haut d'un facteur puisque le calcul des effets dans les plans factoriels détermine un effet moyen et non global.*
- On voit qu'excepté la concentration, aucun des 5 facteurs étudiés (et des interactions) ne dépasse cette limite, ni est à la frontière. Les valeurs des contrastes obtenues peuvent donc être attribuées aux inévitables erreurs aléatoires de manipulation. ***La procédure sera qualifiée de robuste vis à vis de l'exigence de qualité définie ci-dessus.***
- **Il n'a fallu que 8 essais pour aboutir à cette conclusion !**

Une remarque sur la méthodologie

- Il n 'a fallu que 8 essais pour aboutir à la conclusion. Et si un des contrastes s'était révélé significatif, il aurait été effectué 8 essais complémentaires pour lever l'ambiguïté.
- En utilisant la méthode expérimentale classique, *1 seul facteur variable à la fois, les autres restant constants*, il aurait fallu faire 10 essais = 5 (facteurs) x 2 (concentrations). Et ceci sans aucune possibilité de détecter une interaction c'est à dire une variation d 'effet

III-3 : les plans de TAGUCHI

- La mise en œuvre des plans fractionnaires n'est pas simple et difficilement accessible aux personnels dans l'industrie ne possédant pas de formation supérieure.

G. TAGUCHI a mis au point des plans présentés sous forme de tables dont le mode d'emploi est très simple et attractif car il se présente sous forme graphique.

III-4 : les logiciels de plans d 'expériences

Les plans factoriels reposent sur des bases mathématiques. Un programme informatique spécialisé peut donc prendre en charge tous les calculs à effectuer. Il existe sur le marché plusieurs logiciels de plans d 'expériences.

- **Ces logiciels génèrent automatiquement la matrice d'expériences** quand on leur indique le nombre de facteurs et le nombre d'essais à effectuer, en choisissant le plan dont la résolution est la plus élevée.
- **Ces logiciels analysent les résultats** (après entrée des réponses !) : calcul des effets ou des contrastes et leur signification statistique quand il est possible de les tester.
- **Ces logiciels fournissent la représentation graphique des effets** (contrastes) et des interactions de 2ème ordre.

III-5 : exemple d 'application - plan 2^{8-4}

L 'étude porte sur les réglages d 'une machine de moulage par injection fabriquant des récipients en plastique dont la capacité doit être 1000 mL.

- L 'objectif est d 'évaluer l'importance de chacun de 8 paramètres susceptibles d 'agir sur la capacité du récipient terminé afin de maîtriser ce volume ; sur les 8 facteurs étudiés, 2 concernent les caractéristiques de la poudre à mouler (la granulométrie et l'humidité) et les 6 autres sont des réglages du fonctionnement de la machine.
- Nous utiliserons un logiciel de statistiques (**MINITAB**) comportant un module sur les plans d'expériences (**D.O.E.**) pour générer les essais à faire puis analyser les résultats.

Génération de la matrice d'expérience

- Le plan complet à 8 facteurs comprend 28 interactions d'ordre 2 : 36 effets au maximum peuvent se révéler intéressants. Il ne sert donc à rien d'effectuer 256 essais et on n'en effectuera initialement que 16 (le seizième).

- La matrice d'expériences est générée automatiquement par *Minitab* : on notera que les 4 générateurs d'aliases sont **E = BCD**, **F = ACD**, **G = ABC** et **H = ABD**.

Les successions d'aliases de chaque contraste montrent que les 8 facteurs principaux sont aliasés avec des interactions d'ordres supérieurs à 2, mais que les interactions d'ordre 2 sont aliasées entre elles. C'est un plan de résolution IV.

Les successions d'aliases des interactions d'ordre 2 sont :

$$AB = CG = DH = EF$$

$$AC = \mathbf{BG} = DF = EH$$

$$AD = \mathbf{BH} = CF = EG$$

$$AE = BF = \mathbf{CH} = DG$$

$$\mathbf{AF} = BE = CD = GH$$

$$AG = BC = \mathbf{DE} = FH$$

$$AH = BD = CE = FH$$

Ce plan peut être considéré comme satisfaisant par les spécialistes puisque les 8 effets principaux seront estimés sans ambiguïté et que les interactions qu'ils soupçonnent « a priori » avoir de l'importance, notées en jaune, figurent individuellement dans des contrastes différents.

Les valeurs des contrastes

- $E_A = -0,20$
- $E_B = -0,10$
- **$E_C = +3,20$**
- $E_D = +0,10$
- **$E_E = -2,70$**
- $E_F = -0,05$
- $E_G = +0,20$
- **$E_H = +1,90$**
- $E(AB \dots) = -0,30$
- $E(AC \dots) = +0,50$
- $E(AD \dots) = -0,25$
- **$E(AE \dots) = +2,50$**
- $E(AF \dots) = -0,10$
- $E(AG \dots) = -0,15$
- $E(AH \dots) = -0,30$

4 contrastes (en jaune) apparaissent significatifs.

Analyse des contrastes

- 3 facteurs, l'humidité de la poudre à mouler (**C**), sa granulométrie (**E**) et la température du moule (**H**) jouent un rôle important dans la détermination du volume du récipient fabriqué.
- En revanche, pour les variations de réglage de la machine choisies dans l'expérimentation (les niveaux), à savoir la vitesse d'alimentation de la poudre (**D**) et les 2 maintiens en pression (**A**, **B**, **F** et **G**), on ne note pas d'effet.
- Un contraste d'interactions est significatif ; dans la succession d'aliases $AE = BF = CH = DG$, c'est le contraste **CH**, d'ailleurs prévu, qui en est le responsable. *Il n'est pas concevable techniquement que ce soit **AE**, car la granulométrie de la poudre est tout à fait indépendante de la pression de maintien 2, phase qui se situe en fin de fabrication.*

Synthèse

- Les caractéristiques de la poudre à mouler sont donc très importantes à considérer pour le volume du récipient :
une élévation de l'humidité augmente son volume et une augmentation de la granulométrie le diminue.

Une élévation de la température du four de la machine augmente aussi le volume mais cette augmentation est liée à l'humidité : elle est plus grande avec une poudre très humide qu'avec une poudre peu humide.

- **Quantitativement**, en supposant un modèle du 1er degré, le volume y est fonction de X_C , X_E et X_H :

$$y = 1005,15 + 3,20X_C - 2,70X_E + 1,90X_H + 2,50X_C X_H$$

L'étape suivante consisterait à déterminer des valeurs de X_C , X_E et X_H pour que $y = 1000$ mL